Statistikk, Innlevering 2, Vegard G. Jervell

Oppg 1)

$$g(x) = \sum_y f(x,y)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x=-1 \\ \frac{1}{3}, & x=0 \\ \frac{1}{3}, & x=1 \end{cases}$$

$$h(y) = \sum_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & y=0 \\ \frac{1}{3}, & y=1 \\ \frac{1}{3}, & y=2 \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_x x\, g(x) = 0$$

$$E[Y] = \sum_y y\, h(y)$$

$$E[Y] = 1$$

$$Var[X] = \sum_x (x - E[X])^2 g(x) = \frac{2}{3}$$

$$Var[Y] = \sum_y (y - E[Y])^2 h(y) = \frac{2}{3}$$

* Skraverte felt gir $xyf(x,y) = 0$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=-1$			
$x=0$			
$x=1$			

$$Cov[X,Y] = E[X \cdot Y] - \underbrace{E[X] \cdot E[Y]}_{=0}$$

$$= \sum_x \sum_y xy\, f(x,y)$$

$$\overset{*}{=} -1 \cdot \frac{1}{12} + (-2)\frac{1}{12} + 1\left(\frac{1}{12}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$Cov[X,Y] = \frac{1}{6}$$

Forts. oppg. 1)

X og Y er avhengige fordi

$$X \perp Y \to Cov[X,Y] = 0$$

$$\to Cov[X,Y] \neq 0 \to X \not\perp Y \qquad \square$$

Oppg. 2)

$A_i = \{$Får et tall han har fått før på det i-ende kastet, gitt at alle tidligere er forskjellig$\}$

$$P(A_i) = \frac{i-1}{6} \quad , \quad \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}}$$

$B_i = \{$Brahes i kast$\}$

$$P(B_i) = P(A_i)\prod_{n=1}^{i-1} P(\bar{A}_n)$$

For å Brahe i kast må alle i-1 kast være forskjellige, altså oppfylle $\bar{A}_n$ og det i-ende må oppfylle A_i

Dette gir

X	1	2	3	4	5	6	7	>7
$f(x)$	0	0,17	0,27	0,27	0,19	0,08	0,02	0

Oppg. 3a)

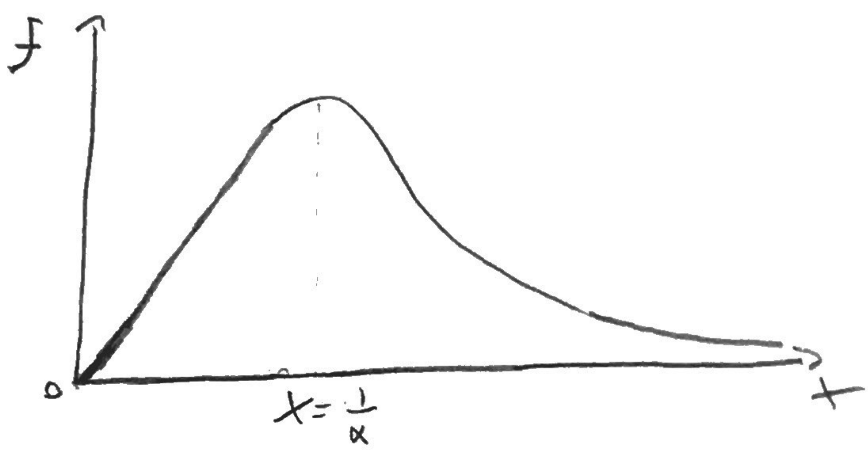
$$F(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau = 1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2\alpha}\right) \quad , \quad x > 0$$

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{x}{\alpha}\exp\left(\frac{-x^2}{2\alpha}\right) \quad , \quad x > 0$$

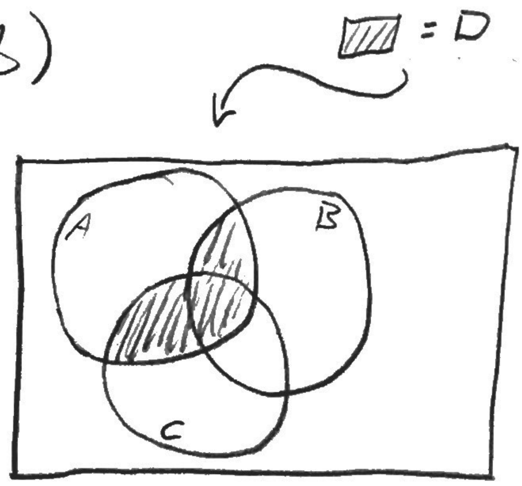
Finner extrema) $\frac{df}{dx} = \frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{-x^2}{2\alpha}\right) - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2\alpha}\right)$

$$\frac{df}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$$

f_{max} ved $x = \frac{1}{\alpha}$



3b)



$$P(D) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

$$P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1 - F(2) = 0{,}135$$

$P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$ ← for uavhengige hendelser

$$P(D) = 0{,}034$$

Oppg 4a) $A_i = \{\text{positiv prøve for person } i\}$

$P(A_i) = p$. Sannsynligheten for at ingen av k prøver er positive blir

$\prod_{i=1}^{k} P(\bar{A}_i)$. Sannsynligheten for at minst en er positiv blir da

$$1 - \prod_{i=1}^{k} P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - P(A_i)) = 1 - (1-p)^k \quad \square$$

4b) $$\underline{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

$B = \{\text{gruppa til Haugen er positiv}\}$, $A = \{\text{Haugen er positiv}\}$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 \rightarrow P(B \cap A) = P(A) = p$$
$$\rightarrow \underline{P(A \cap B) = p}$$

$$\underline{\underline{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{p}{1-(1-p)^k}}}$$

4c) definerer Y_i := Antall blodprøver som kreves for å sjekke gruppe i

Sannsynlighetstettheten til Y $\rightarrow$ $f(y) = \begin{cases} 1-(1-p)^k, & y = k+1 \\ (1-p)^k, & y = 1 \end{cases}$

dermed blir $X = \sum_{i=1}^{m} Y_i = g(y)$. Da blir

$$E[X] = \sum_{y} g(y) f(y) = \left(\sum_{i=1}^{m} 1\right) f(1) + \left(\sum_{i=1}^{m} (k+1)\right) f(k+1)$$

$$E[X] = m(1-p)^k + m(k+1)(1-(1-p)^k)$$

$$= mk - mk(1-p)^k + m$$

$$E[X] = mk\left(1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k\right) \quad \square$$

For at fremgangsmåten skal lønne seg må

$E[X] < mk$, for $k=4$ gir det

$$4\left(1 + \frac{1}{4} - (1-p)^4\right) < 4$$

$$(1-p)^4 > \frac{1}{4}$$

$$1-p > \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{p < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$